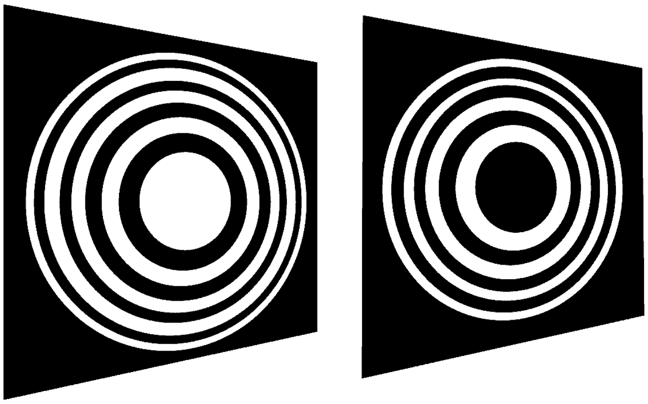
Zoneplaat

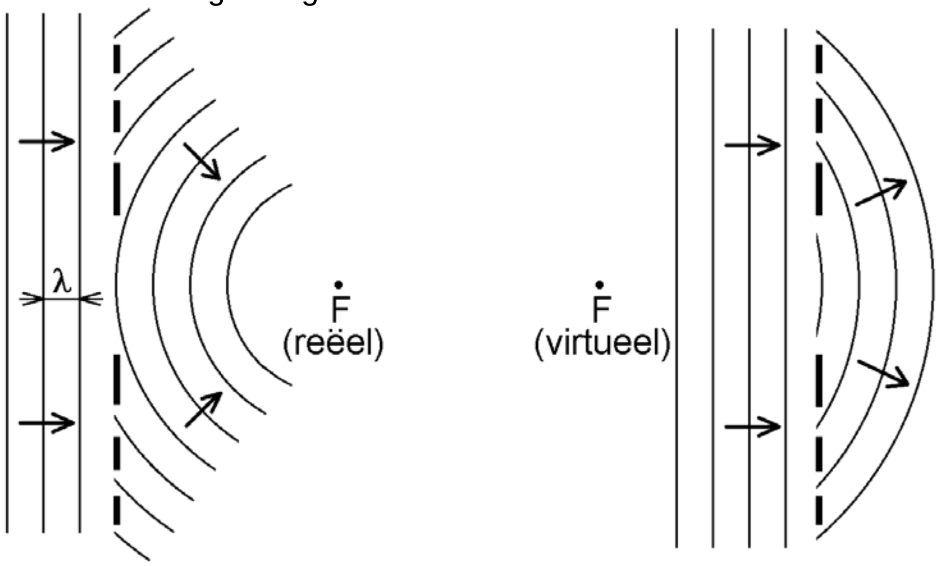
Binaire zoneplaat

De figuren hiernaast tonen twee zoneplaten. Zoneplaten bevatten cirkelvormige vlakken die afwisselend transparant en niet transparant voor golven (hier lichtgolven) zijn. Deze vlakken noemen we ‘zones’. De zones worden, uitgaande van de binnenste zone, genummerd. In de linker zoneplaat zijn de oneven zones transparant en in de rechter zoneplaat de even zones. Voor de werking van de zoneplaat maakt dit geen verschil.



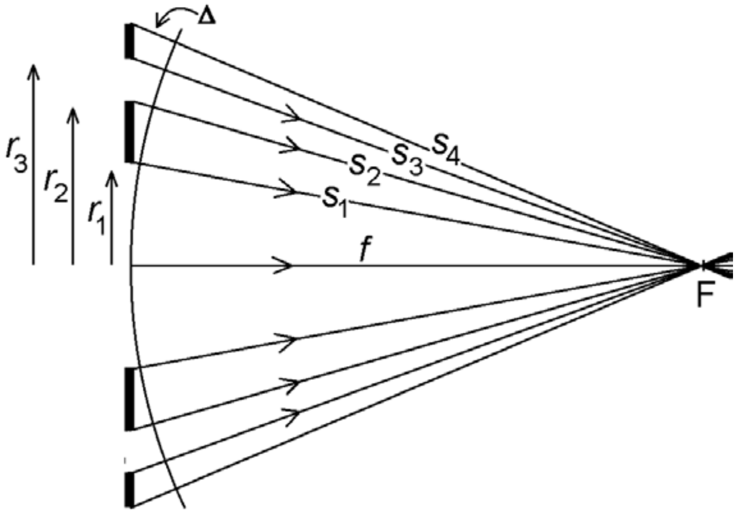
Omdat de hierboven beschreven zoneplaat slechts twee waarden van de doorlaatbaarheid kent, namelijk 0% en 100%, wordt deze ook wel een binaire zoneplaat genoemd. De tegenhanger hiervan is de continue of Gabor zoneplaat waarbij de doorlaatbaarheid alle waarden tussen 0% en 100 kan aannemen.

Het doel van een zoneplaat is om de invallende golven samen te bundelen tot één punt. Dit is in de onderstaande linker figuur weergegeven waarin golffronten (geen golfstralen) getekend zijn op een onderlinge afstand van een golflengte λ. Voorbij de zoneplaat bewegen de golven naar het brandpunt F. Dit wordt bereikt door de gemiddelde afstand van de opvolgende transparante zones tot het brandpunt F steeds met één golflengte te laten toenemen.



Zoals uit de rechter figuur blijkt, ontstaat er naast een convergerende golf een divergerende golf. Hierbij lijken de golfstralen uit punt F te komen. In de linker figuur wordt het brandpunt reëel genoemd en in de rechter figuur virtueel.

Stralen van de zoneovergangen bij de binaire zoneplaat



In de figuur hiernaast is de doorsnede van een zoneplaat getekend. Voor de eenvoud zijn er slechts vier zones getekend. De straal van de n-de zonerand is met r_n aangegeven en de afstand van de n-de zonerand tot F met s_n. De afstand van de zoneplaat tot F wordt de brandpuntsafstand f genoemd. Onder het weglengteverschil Δ_n verstaan we het verschil tussen s_n en f. In formulevorm is dit:

$\Delta_n = s_n - f$.

We kunnen het verband tussen het weglengteverschil Δ_n en de straal r_n eenvoudig afleiden. We laten de indices daarbij even achterwege.

Volgens de wet van Pythagoras geldt: $s^2 = f^2 + r^2$.

Omdat $s = f + \Delta$ geldt dan: $(f + \Delta)^2 = f^2 + r^2$.

Hieruit volgt: $2 \cdot f \cdot \Delta + \Delta^2 = r^2$.

Hieruit volgt: $r = \sqrt{2 \cdot f \cdot \Delta + \Delta^2}$.

Zolang Δ veel kleiner is dan 2·f, geldt:

$r = \sqrt{2 \cdot f \cdot \Delta}$

Door de transparante zones van de zoneplaat passeren golven. Om deze golven elkaar in F te laten versterken, moet het weglengteverschil van de n-de zonerand voldoen aan:

$$\Delta_n = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Dit komt erop neer dat:

- s_1 een halve golflengte langer is dan f,
- s_2 een hele golflengte langer is dan f,
- s_3 anderhalve golflengte langer is dan f enzovoort.

Op deze manier neemt de gemiddelde afstand tussen de opvolgende transparante zones en brandpunt F steeds met een hele golflengte toe en versterken deze zones elkaar dus in F.

Voor de straal van de n-de zonerand vinden we tenslotte:

$r_n = \sqrt{n \cdot f \cdot \lambda}$

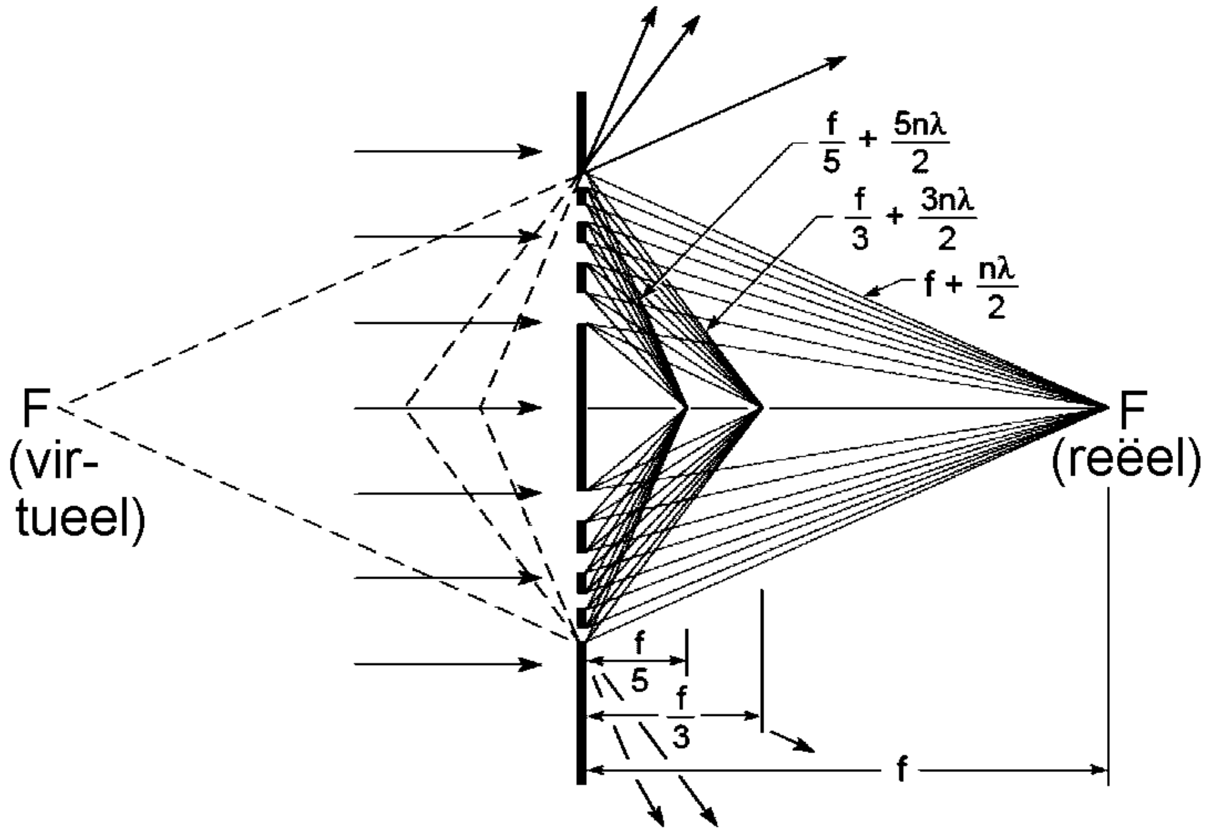
Stel bijvoorbeeld dat f = 10 cm en λ = 500 nm. Dan is r_1 = 0,22 mm en r_{100} = 2,2 mm. Uit de laatste formule volgt dat bij een gegeven zoneplaat (vaste waarden van r_n), de brandpuntsafstand f toeneemt bij een kleinere golflengte. Ook blijkt uit de laatste formule dat de oppervlakte van iedere zone bij benadering gelijk is. Voor deze oppervlakte geldt:

$A_n = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi \cdot f \cdot \lambda$.

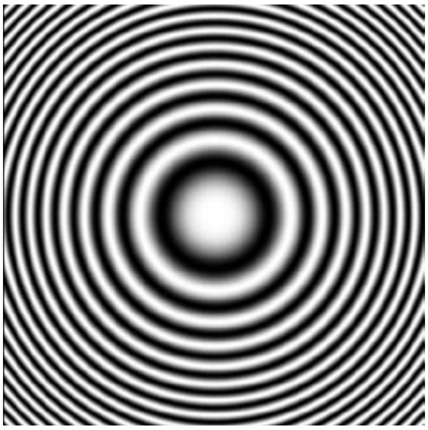
Brandpunten van de binaire zoneplaat

In de onderstaande figuur wordt een zoneplaat beschenen met een loodrecht invallende bundel monochromatisch licht. Op de centrale as (die loodrecht op de zoneplaat staat) bevinden zich twee primaire brandpunten die met F zijn aangegeven. Het rechter primaire brandpunt is reëel en het linker primaire brandpunt is virtueel. Beide brandpunten bevinden zich op afstand f (= brandpuntsafstand) van de zoneplaat.

Nieuw is dat de zoneplaat ook een aantal secundaire brandpunten heeft. Van ieder secundair brandpunt bestaan er weer een reële en een virtuele versie. De bijbehorende brandpuntsafstanden bedragen f/3, f/5, f/7 enzovoort. We kunnen dit eenvoudig begrijpen. Neem die van f/3 bijvoorbeeld. Elke zone van de zoneplaat bevat dan eigenlijk drie zones met ieder een weglengtetoename van een halve golflengte. Twee van de drie zones heffen elkaar dan in het secundaire brandpunt op en blijft er precies één zone voor constructieve interferentie over.



Continue zoneplaat



In de figuur hiernaast staat een continue zoneplaat afgebeeld. Kenmerkend hierbij is dat de overgangen van de zones vloeiend verlopen in tegenstelling tot de binaire zoneplaat. De doorlaatbaarheid van de zoneplaat varieert van 0% tot 100% met alle tussenliggende waarden. Het voordeel van een continue zoneplaat boven een binaire zoneplaat is dat de eerstgenoemde geen secundaire brandpunten heeft, alleen een reëel en een virtueel primair brandpunt.

Onder de doorlaatbaarheid T van een punt van de zoneplaat verstaan we de amplitude van de doorgelaten golf gedeeld door de amplitude van de invallende golf. Bij lichtgolven gaat het daarbij om de verhouding van de amplitudes van de elektrische of de magnetische veldsterkte. De doorlaatbaarheid is dus niet de verhouding van twee intensiteiten. De doorlaatbaarheid ligt tussen 0 en 1.

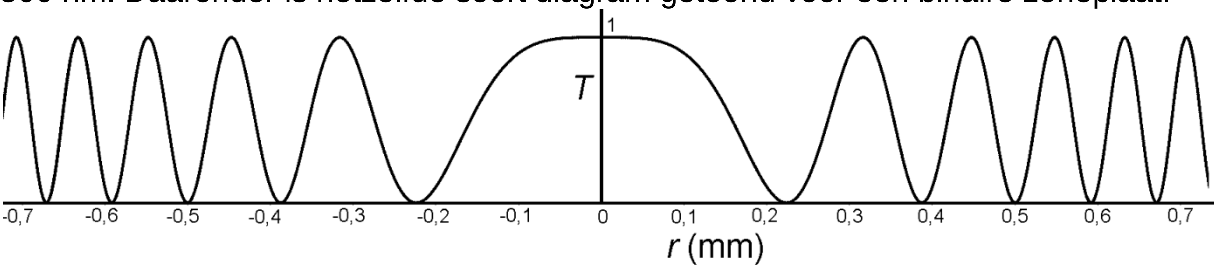
De doorlaatbaarheid van een continue zoneplaat hangt als volgt van de afstand r tot het midden af.

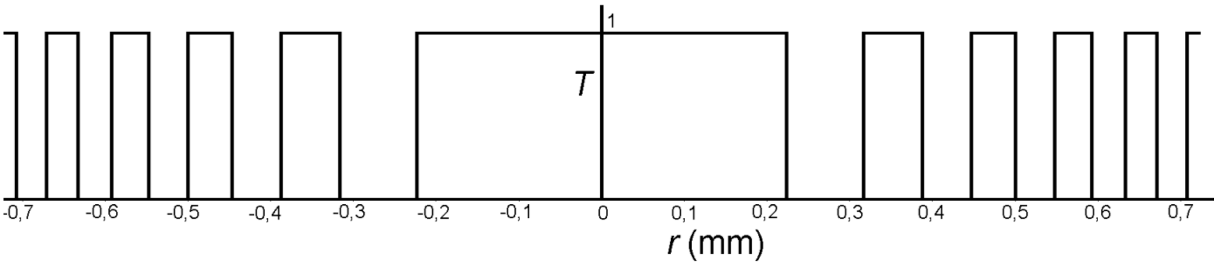
$$T = \frac{1 + \cos(\pi \cdot \frac{r^2}{f \cdot \lambda})}{2}$$

Met $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ kan deze uitdrukking herschreven worden als:

$$T = \frac{1 + \cos(\frac{k \cdot r^2}{2 \cdot f})}{2}$$

Het onderstaande diagram toont het verband tussen T en r als f = 10 cm en λ = 500 nm. Daaronder is hetzelfde soort diagram getoond voor een binaire zoneplaat.





We krijgen diagrammen die inzichtelijker zijn als we T tegen de grootheid Δ / λ uitzetten waarbij Δ het eerder gedefinieerde weglengteverschil is. We moeten de hierboven gegeven formule voor T dan even omschrijven.
Eerder vonden we het volgende (benaderende) verband tussen straal r en weglengteverschil Δ:

$$r = \sqrt{2 \cdot f \cdot \Delta}\,.$$

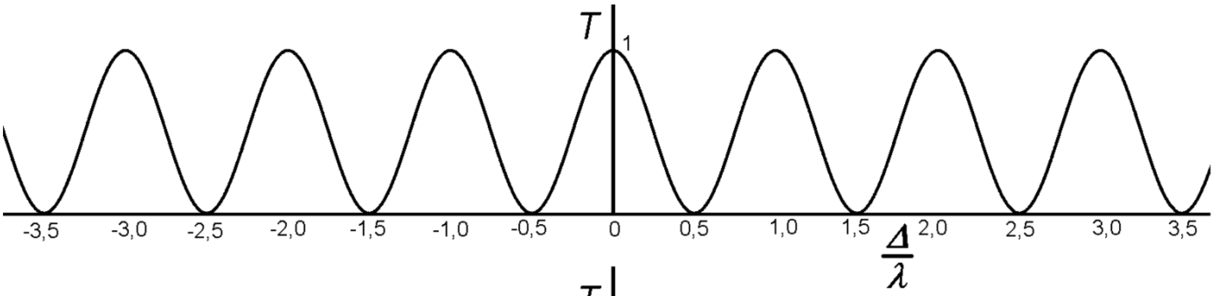
Hieruit volgt:

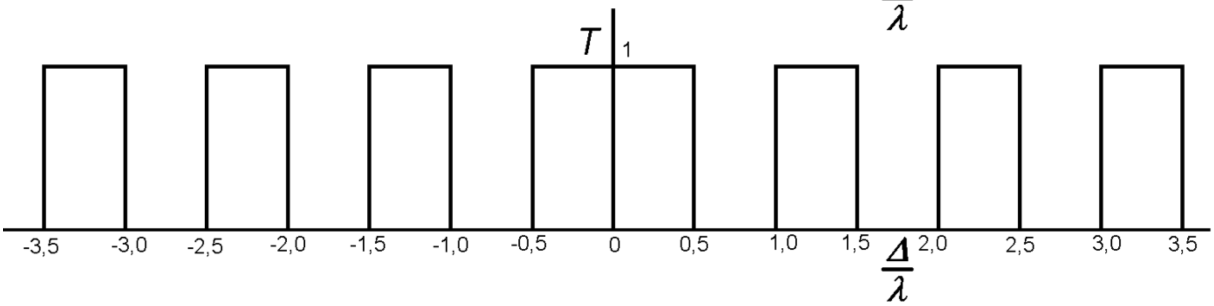
$$\Delta = \frac{r^2}{2 \cdot f}$$

Voor de doorlaatbaarheid van een continue zoneplaat geldt dan:

$$T = \frac{1 + \cos(2\pi \cdot \frac{\Delta}{\lambda})}{2}\,.$$

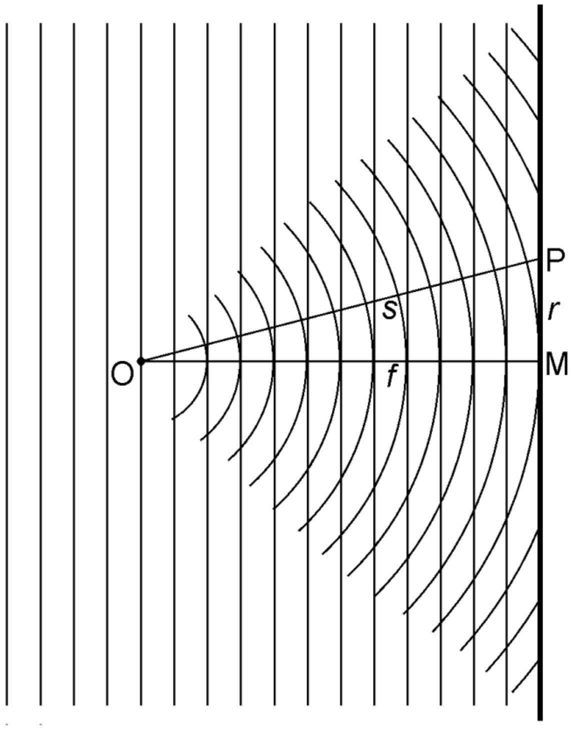
In het volgende diagram is T tegen Δ/λ uitgezet voor een continue zoneplaat..
Daaronder is hetzelfde soort diagram getoond voor een binaire zoneplaat.





De diagrammen hebben een periode van 1. Dat betekent dat de transparante zones elkaar in het brandpunt versterken.

Het interferentiepatroon van een bolgolf en een vlakke golf



In de figuur hiernaast vallen twee golven met één en dezelfde frequentie op een scherm. De ene golf is vlak en valt loodrecht op het scherm. De andere golf is afkomstig van puntbron O die zich op afstand f van het scherm bevindt. Van alle punten van het scherm heeft punt M de kleinste afstand tot O. Het interferentiepatroon op het scherm is cirkelsymmetrisch rond M. Punt P is een willekeurig punt op het scherm. De letters r en s zijn de afstanden tussen P en M respectievelijk P en O. Er geldt:

$$s = \sqrt{f^2 + r^2} = f \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{f}\right)^2} \, .$$

In het volgende beperken we ons tot gevallen waarbij r veel kleiner is dan f. In dat geval geldt bij benadering:

$$s = f + \frac{r^2}{2 \cdot f} \, .$$

We berekenen de resulterende intensiteit op het scherm. We gaan er daarbij vanuit dat beide golven in fase bij M aankomen en dat de amplitudes op die plaats gelijk zijn. Omdat r veel kleiner is dan f, kunnen we de amplitude van de bolgolf langs het scherm als constant beschouwen. Zoals we zullen zien, lijkt de plaatsafhankelijkheid van de intensiteit dan sprekend op die van de doorlaatbaarheid van een continue zoneplaat.

Voor de uitwijking van de vlakke golf en bolgolf ter plaatse van het scherm kunnen we stellen:

$u_1(t) = A \cdot \sin(\omega t - kf)$ en $u_2(r,t) = A \cdot \sin(\omega t - ks)$

Omdat r veel kleiner is dan f, kunnen we voor u_2 schrijven:

$$u_2(r,t) = A \cdot \sin(\omega t - kf - \frac{k \cdot r^2}{2 \cdot f})$$

Voor de resulterende uitwijking u_{res} langs het scherm geldt dan:

$$u_{res}(r,t) = u_1 + u_2 = A \cdot \sin(\omega t - kf) + A \cdot \sin(\omega t - kf - \frac{k \cdot r^2}{2 \cdot f}) \, .$$

Vanuit de wiskunde weten we: $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha + \beta}{2})$.

Hiermee kunnen we de uitdrukking voor u_{res} herschrijven als:

$$u_{res}(r,t) = 2A \cdot \cos(\frac{k \cdot r^2}{4 \cdot f}) \cdot \sin(\omega t - kf - \frac{k \cdot r^2}{4 \cdot f})$$

Aangezien de intensiteit evenredig is met de amplitude in het kwadraat, geldt:

$$I = I_M \cdot \cos^2\left(\frac{k \cdot r^2}{4 \cdot f}\right)$$

Hierin is I_M de intensiteit bij punt M.

Aangezien $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$ kunnen we voor de intensiteit schrijven:

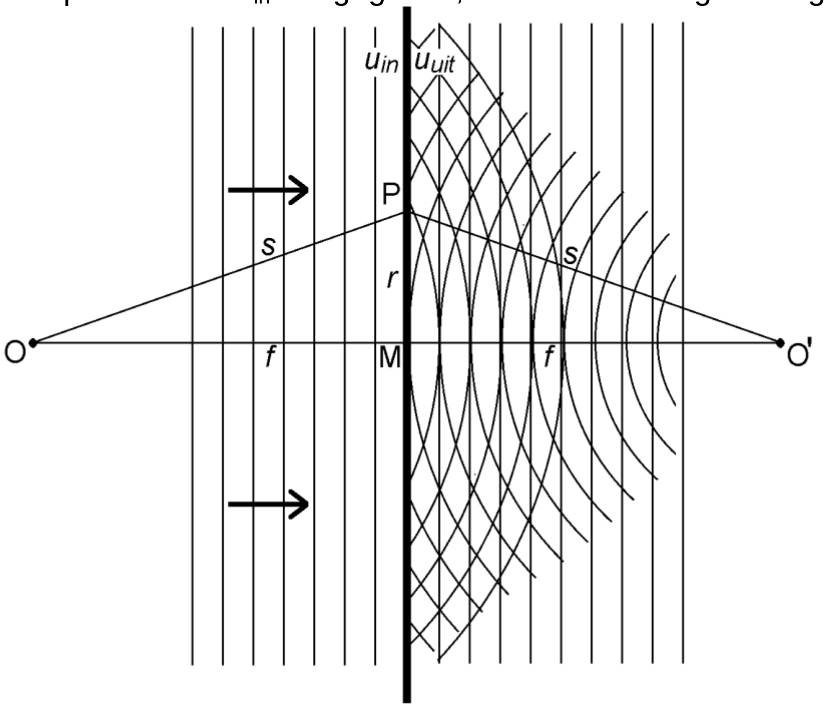
$$I = I_M \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{k \cdot r^2}{2 \cdot f}\right)}{2}.$$

Afgezien van een constante factor komt dit overeen met de eerder gegeven formule voor de doorlaatbaarheid van een continue zoneplaat:

$$T = \frac{1 + \cos\left(\frac{k \cdot r^2}{2 \cdot f}\right)}{2}$$

Op een continue zoneplaat een vlakke golf laten vallen

In de onderstaande figuur valt een vlakke golf loodrecht op een continue zoneplaat. Het midden van de zoneplaat is net als hiervoor met M aangegeven en de twee brandpunten van de zoneplaat met O en O’. De brandpuntsafstand is f. Punt P is een willekeurig punt van de zoneplaat. De afstand tussen P en M is r en de afstand tussen P en O of O‘ is s. De uitwijking van de invallende golf ter plaatse van de zoneplaat is met u_{in} aangegeven; die van de doorgelaten golf met u_{uit}.



Door de werking van de zoneplaat lopen er aan de rechterkant drie golven naar rechts, namelijk een convergerende golf, een divergerende golf en een vlakke golf. De convergerende golf komt in het reële brandpunt O’ van de plaat samen. De divergerende golf lijkt vanuit het virtuele brandpunt O te vertrekken. In de volgende berekening gaan we dit na. Net als hiervoor beperken we ons tot gevallen waarbij r veel kleiner is dan f.

We gaan uit van de volgende invallende golf:

$$u_{in}(t) = A \cdot \sin(\omega t - kf)\,.$$

De zoneplaat heeft als doorlaatfunctie (zie hiervoor):

$$T(r) = \frac{1 + \cos(\frac{k \cdot r^2}{2 \cdot f})}{2}$$

Voor het golfveld $u_{uit}(r,t)$ direct voorbij de zoneplaat geldt dan:

$$u_{uit}(r,t) = T(r) \cdot u_{in}(t)$$

Dit wordt:

$$u_{uit}(r,t) = A \cdot \frac{1 + \cos(\frac{k \cdot r^2}{2 \cdot f})}{2} \cdot \sin(\omega t - kf)$$

Uitwerken geeft:

$$u_{uit}(r,t) = \frac{A}{2}\cdot\sin(\omega t - kf) + \frac{A}{2}\cdot\sin(\omega t - kf)\cdot\cos(\frac{k\cdot r^2}{2\cdot f}).$$

Door gebruikmaking van de betrekking

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

vinden we:

$$u_{uit}(r,t) = \frac{A}{2}\cdot\sin(\omega t - kf) + \frac{A}{4}\cdot\sin(\omega t - kf - \frac{k\cdot r^2}{2\cdot f}) + \frac{A}{4}\cdot\sin(\omega t - kf + \frac{k\cdot r^2}{2\cdot f})$$

Dit kan herschreven als:

$$u_{uit}(r,t) = \frac{A}{2}\cdot\sin(\omega t - kf) + \frac{A}{4}\cdot\sin(\omega t - ks) + \frac{A}{4}\cdot\sin(\omega t - 2kf + ks)$$

De eerste term van het rechterlid hoort bij een vlakke golf, de tweede term bij een divergerende golf vanuit O en de derde term een convergerende golf naar O'. Merk op dat alle drie de golven in fase met elkaar zijn in punt M.